

## Betrachtung eines Bessel-TP --- 21. Okt. 2017 Ingenieurbüro Baumann, Dorsten

- `reset():MAXDEPTH:=1000:ta:=time():DIGITS:=32:w:=2*PI*f:`

### die Eingangsdaten

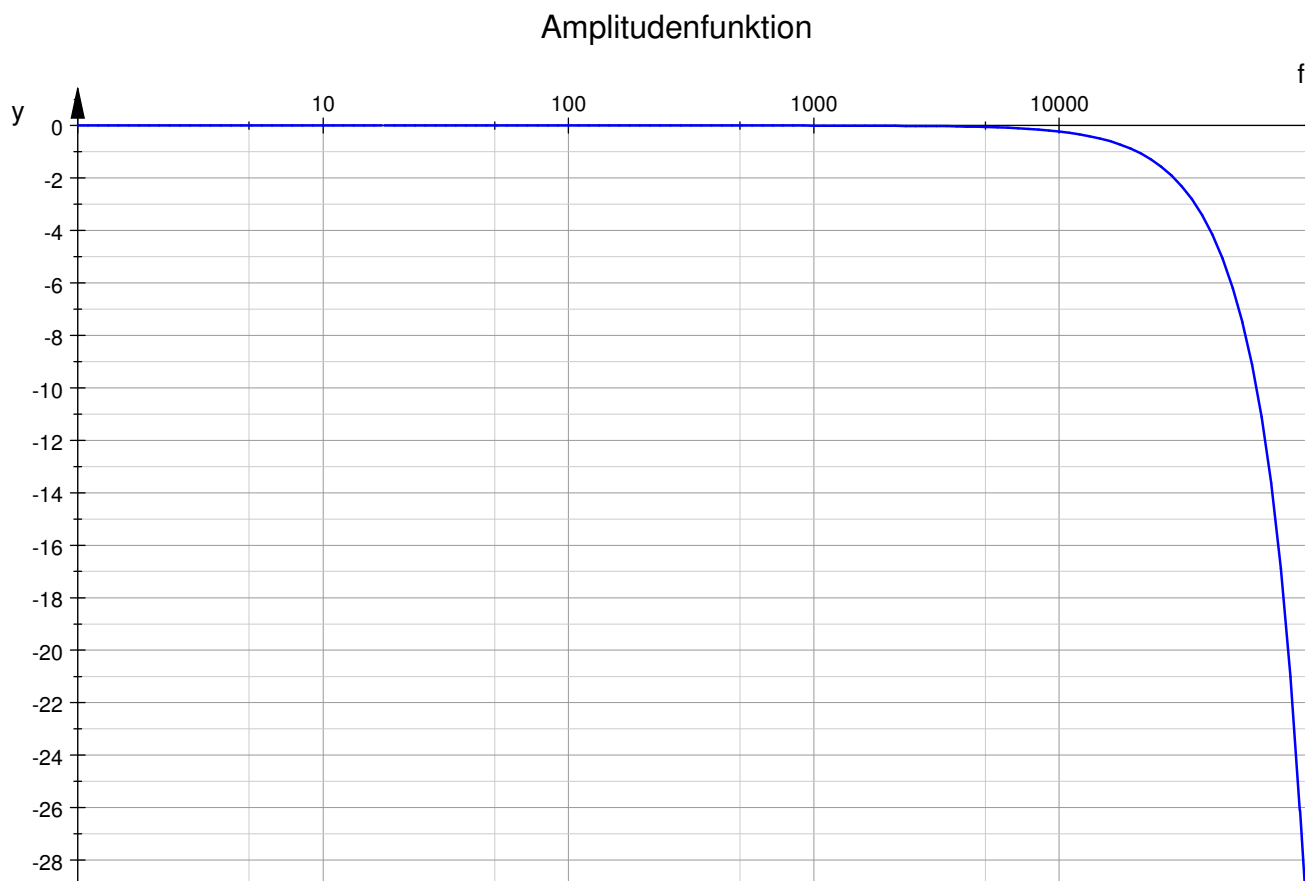
- `n:=10:fg:=10e3:ue2:=1:`

### die Berechnungen

- `wg:=2*PI*fg:`
- `b:=[fact(2*n-(i-1))/(2^(n-(i-1))*fact(i-1)*fact(n-(i-1))) $ i=1..n+1]:b0:=b[1]:a0:=b0:`
- `delete i:U2U0:=(f)->b0/(a0*(1+1/ue2))*a0/sum(b[i+1]*(I*w/wg)^i, i=0..n):`
- `U2U0dB:=(f)->20*log(10,abs(U2U0(f))):`
- `Winkel:=(f)->180/PI*arctan(Im(U2U0(f))/Re(U2U0(f))):`
- `Winkel:=(f)->180/PI*arg(U2U0(f)):`
- `tg1:=(f)->-diff(Winkel(f),f)/360:`

### Betrag der Übertragungsfunktion, doppelt logarithmisch

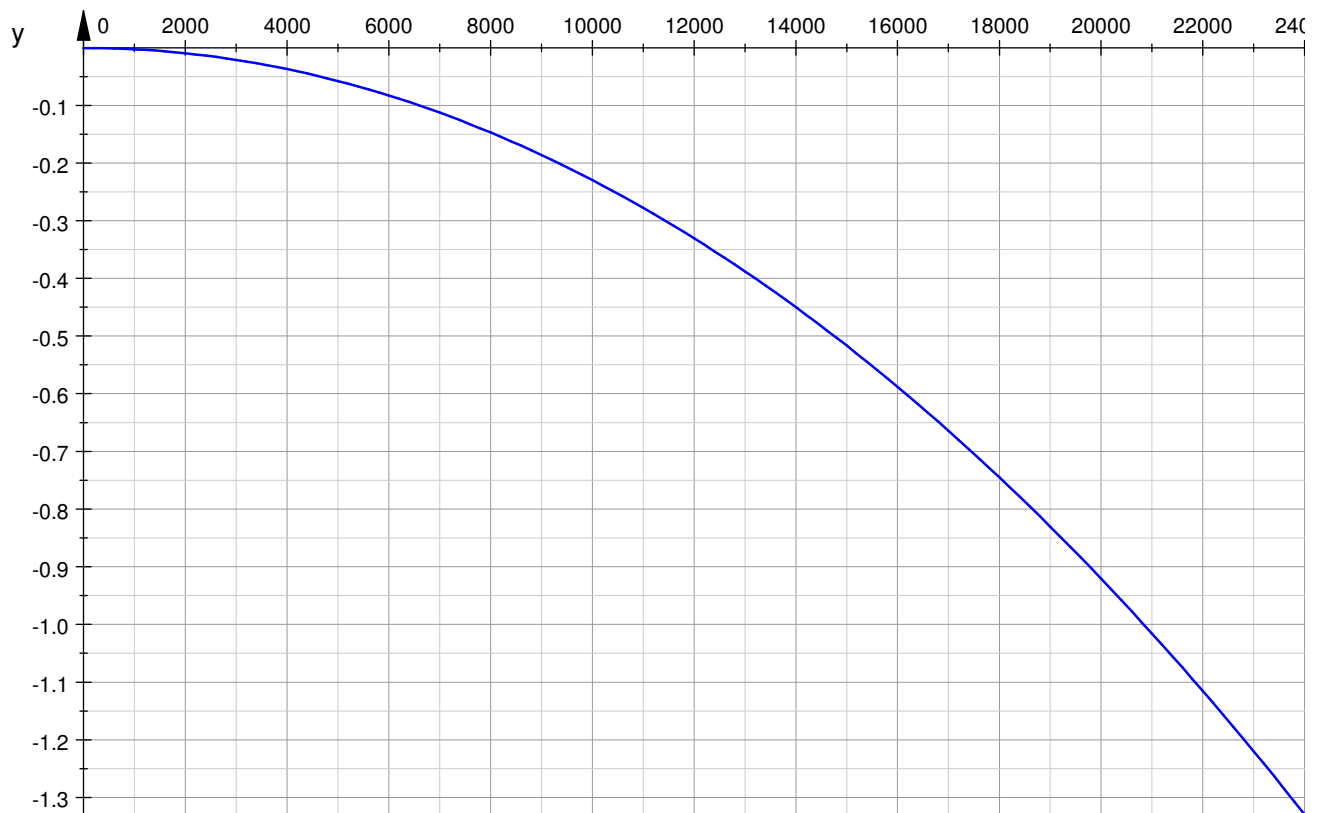
- `plotfunc2d(U2U0dB(f)+6.02, f=1..10*fg, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LogLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Amplitudenfunktion"):`



### Ausschnittsvergrößerung aus dem Betrag der Übertragungsfunktion

- `plotfunc2d(U2U0dB(f)+6.02, f=0..2.4*fg, LegendVisible=FALSE, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Vergrößerung Amplitudenfunktion"):`

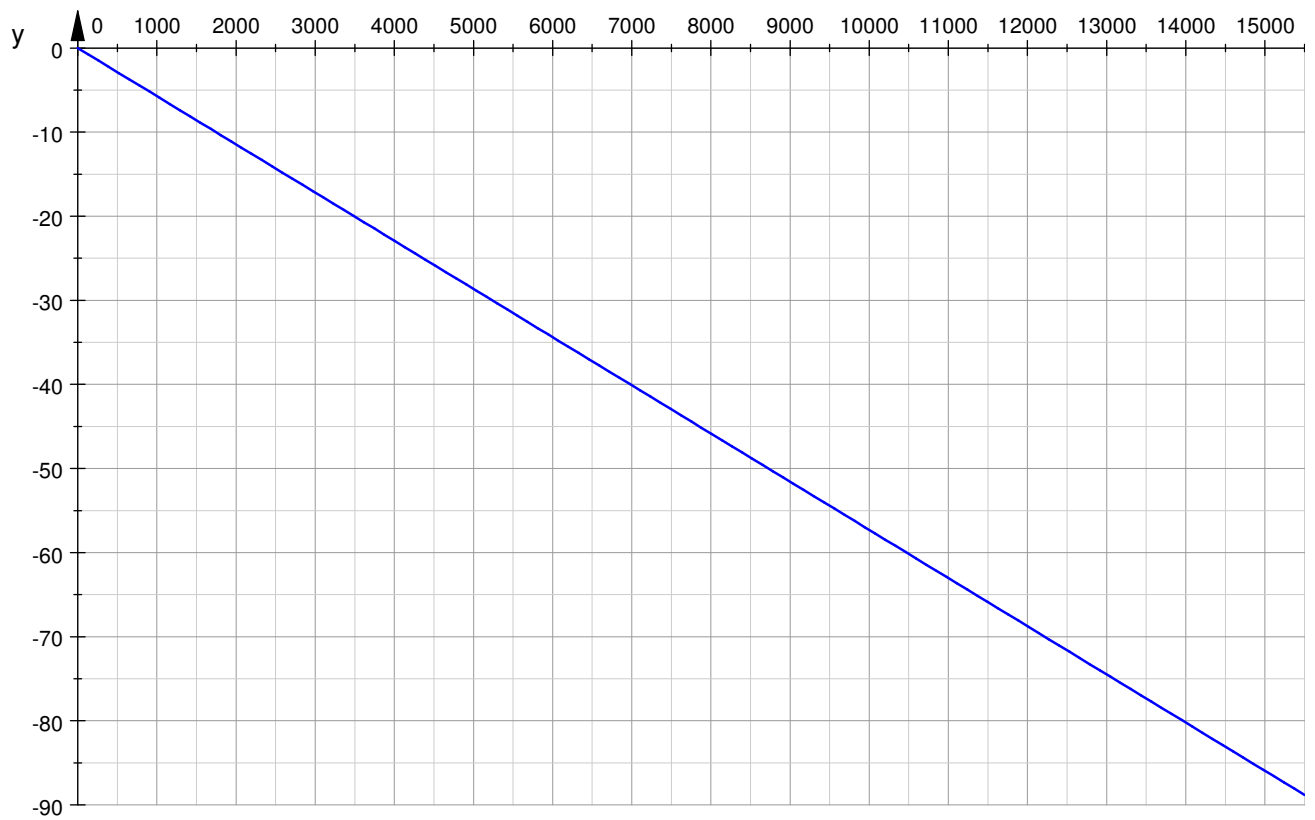
## Vergößerung Amplitudenfunktion



### die Phasenverschiebung des Filters

- ```
plotfunc2d(Winkel(f), f=0..1.55*fg, LegendVisible=FALSE,  
           GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
           Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm,  
           Header="Phasenfunktion"):
```

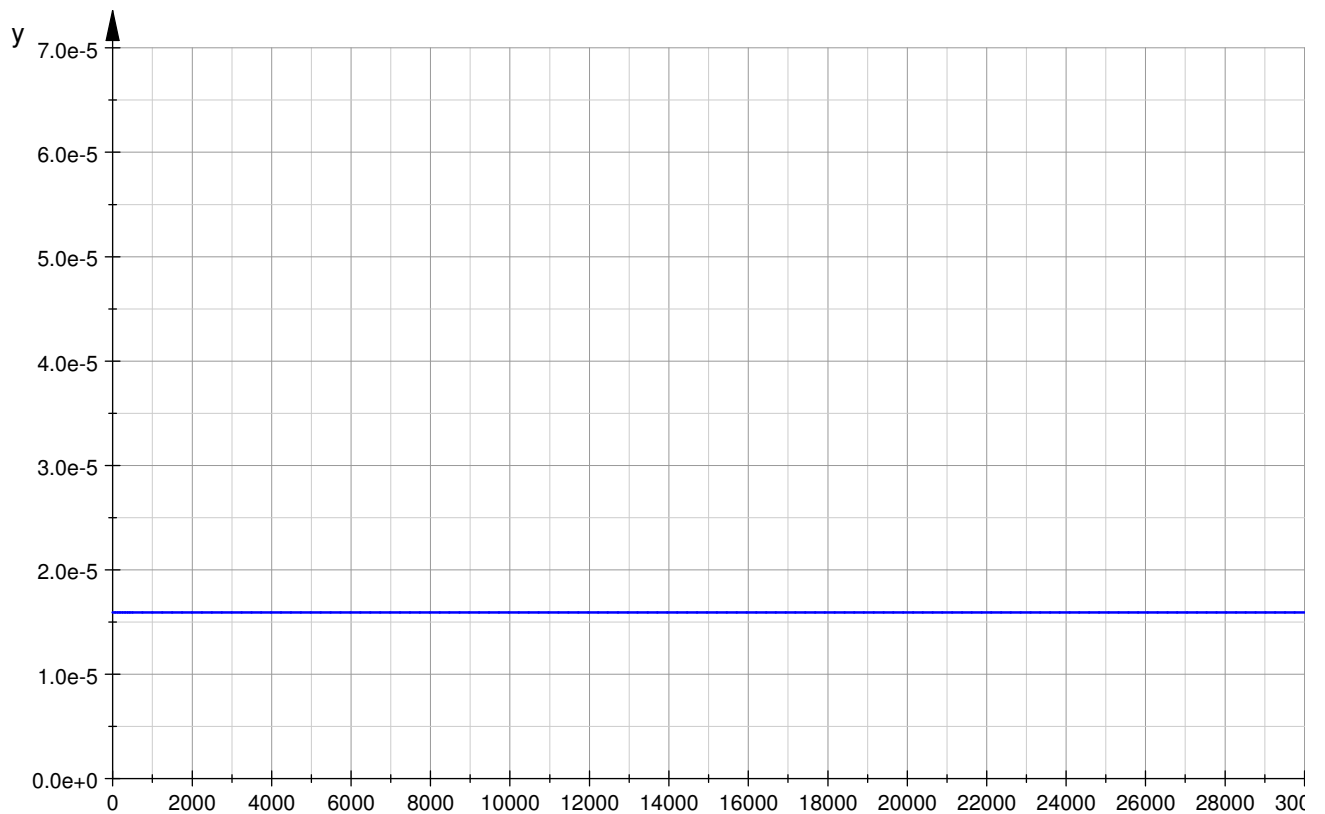
## Phasenfunktion



### Gruppenlaufzeit aus dem differenzierten Phasenverlauf

- `plotfunc2d(tg1(f), f=0..3*fg, LegendVisible=FALSE, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Gruppenlaufzeit", YRange=0..7e-5):`

## Gruppenlaufzeit



das Bessel-Polynom ohne die Grunddämpfung

- `Poly := (F) -> expand (sum (b [i+1] * (F) ^i, i=0..n)) : b;`

`[654729075, 654729075, 310134825, 91891800, 18918900, 2837835, 315315, 25740, 1485, 55, 1]`

- `a0 / Poly (F);`

$$\frac{654729075}{F^{10} + 55 \cdot F^9 + 1485 \cdot F^8 + 25740 \cdot F^7 + 315315 \cdot F^6 + 2837835 \cdot F^5 + 18918900 \cdot F^4 + 91891800 \cdot F^3 + 310134825 \cdot F^2 + 654729075 \cdot F + 55}$$

die Grunddämpfung durch  $\ddot{u}^2$

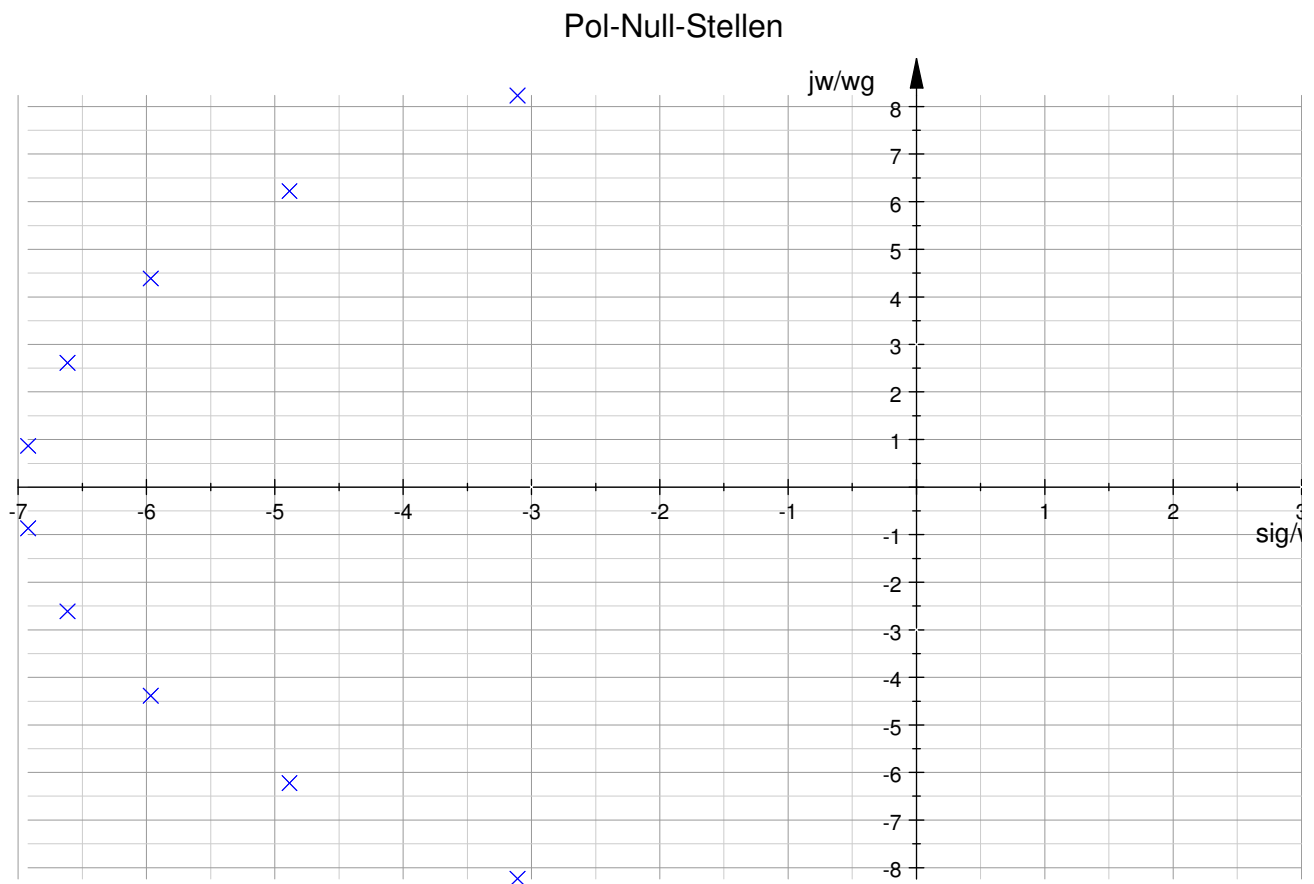
- `b0 / (a0 * (1 + 1/ue2));`

$$\frac{1}{2}$$

- `delete i: Pol := float (solve (Poly (F) = 0, F)) :`
- `delete Liste: for i from 1 to n do  
    PolTab [i] := op (Pol, i) :`  
`end_for:`
- `Liste := [ [Re (op (op (PolTab, i), 2)), Im (op (op (PolTab, i), 2)), RGB :: Blue]  
    $ i=1..n] :`
- `Liste := Liste. [ [3, 0, RGB :: White] ]. [ [0, 3, RGB :: White] ]. [ [-  
    3, 0, RGB :: White] ]. [ [0, -3, RGB :: White] ] :`

die Lage der Pol-Nullstellen in der komplexen Ebene

- `plot(plot::PointList2d(Liste, PointStyle=XCrosses, PointSize=2, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Scaling=Unconstrained, AxesTitles=["sig/wg", "jw/wg"], Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Pol-Null-Stellen")):`



die Pol-Nullstellen

- `PolTab;`

$$\begin{aligned}
 1 &= -3.1089162336490982053741896734021 + 8.2326994590735874504614100208267 \cdot i \\
 2 &= -3.1089162336490982053741896734021 - 8.2326994590735874504614100208267 \cdot i \\
 3 &= -4.8862195668589995798960421536141 - 6.2249854824715671075268153942851 \cdot i \\
 4 &= -4.8862195668589995798960421536141 + 6.2249854824715671075268153942851 \cdot i \\
 5 &= -5.9675283285877858403614053794872 - 4.3849471889419320681840587427744 \cdot i \\
 6 &= -5.9675283285877858403614053794872 + 4.3849471889419320681840587427744 \cdot i \\
 7 &= -6.6152909654768702589451546716817 - 2.6115679208000898734940089896251 \cdot i \\
 8 &= -6.6152909654768702589451546716817 + 2.6115679208000898734940089896251 \cdot i \\
 9 &= -6.9220449054272461154232081218149 + 0.86766519545122143844613432321833 \cdot i \\
 10 &= -6.9220449054272461154232081218149 - 0.86766519545122143844613432321833 \cdot i
 \end{aligned}$$

Antworten des Filters mit  $ua(t)=\text{invlaplace}(L\{ue(t)\} \cdot T(p))$

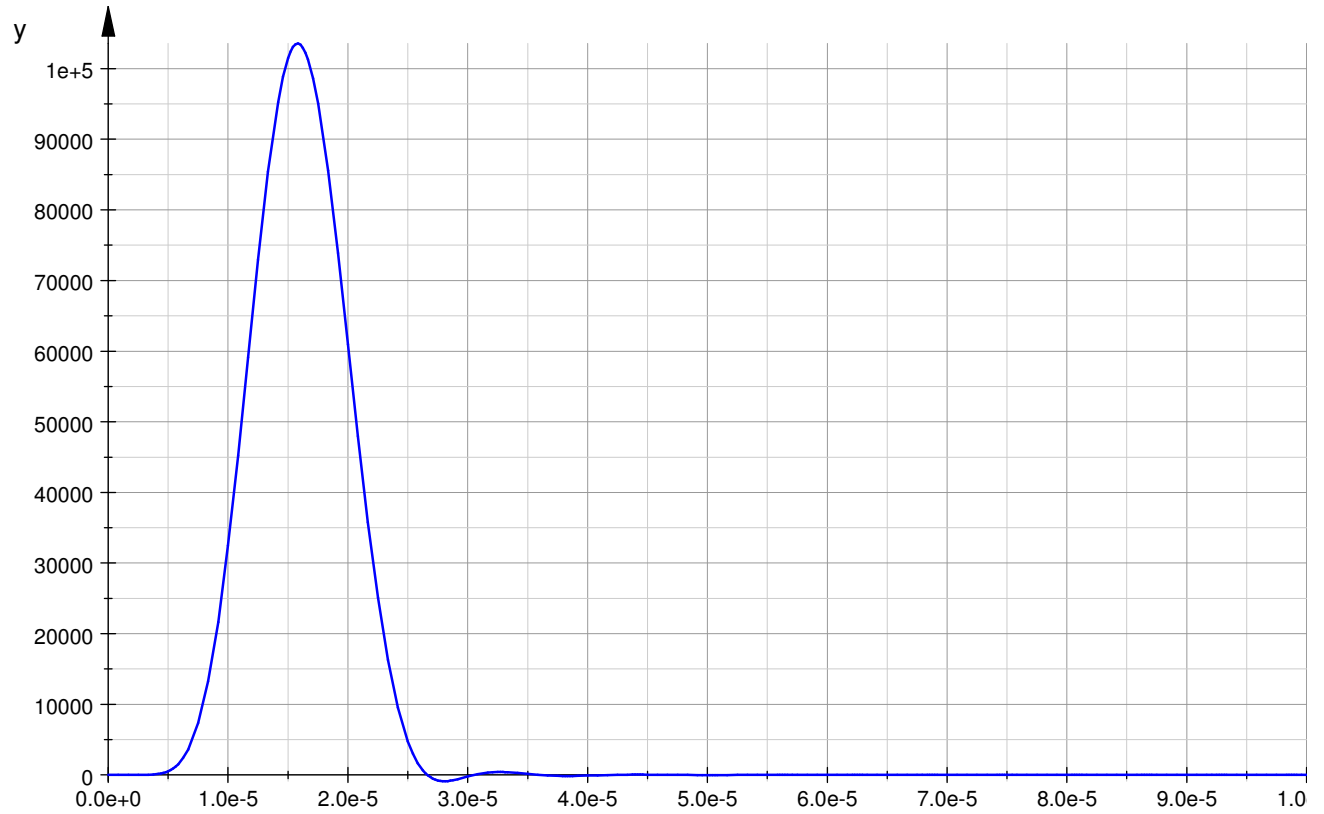
- `prodp:=_mult(p/wg-op(Pol,i) $ i=1..n):`

Sprungantwort des Filters  $L\{ue(t)\}=1$

- `ua:=(t)->Re(ttransform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/prodp,p,t)):`

- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Impulsantwort"):`

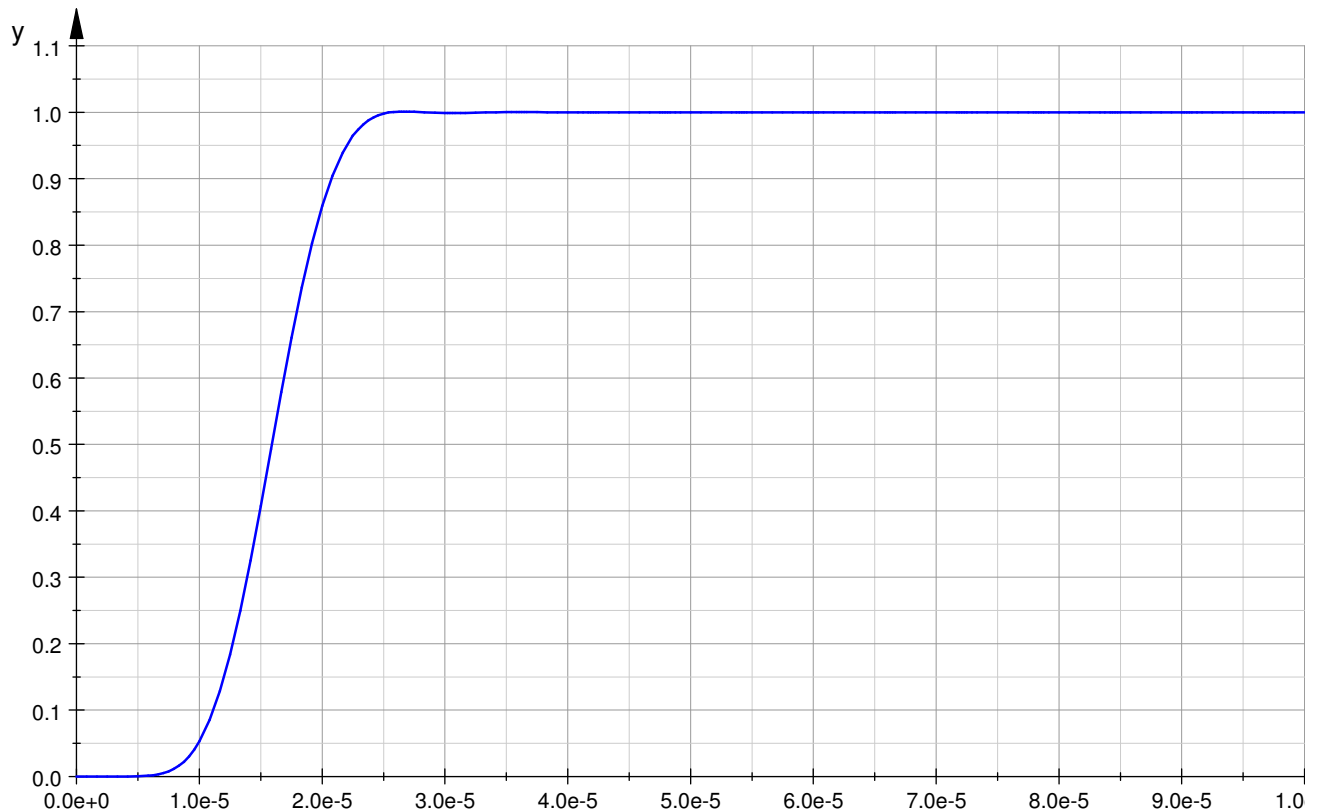
Impulsantwort



Sprungantwort des Filters  $L\{u_e(t)\}=1/p$

- `ua:=(t)->Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/p/prodp,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Sprungantwort", YRange=0..1.1):`

## Sprungantwort



### Suchbereich für Flankendaten

- `anf:=0:ende:=1/2/fg:`

### Überschwingen in % bei t in us

- `maximum:=op(numeric::solve(diff(ua(t),t)=0,t=0..1/2/fg,RestrictedSearch),1):`
- `(ua(maximum)-1)*100;maximum/1e-6;`  
0.039823211631573961952648843201839  
36.054421120602661491040477282487

### t0 für ua(t)=1/2 in us

- `delete t:tx:=op(numeric::solve(ua(t)=1/2,t=anf..maximum,RestrictedSearch),1):tx/1e-6;`  
15.899990495215064045577177911605

### die Einschwingzeit tau in us und die daraus resultierende Grenzfrequenz in kHz

- `m:=ua'(t):t:=tx:m:=float(m):delete t:yt:=t->1/2-m*(tx-t):`
- `tau:=op(solve(yt(t)=1,t),1)-op(solve(yt(t)=0,t),1):tau/1e-6;float(1/2/PI/tau/1e3);`  
9.6594103704607212696947651076057  
16.476672694081241545276804271583

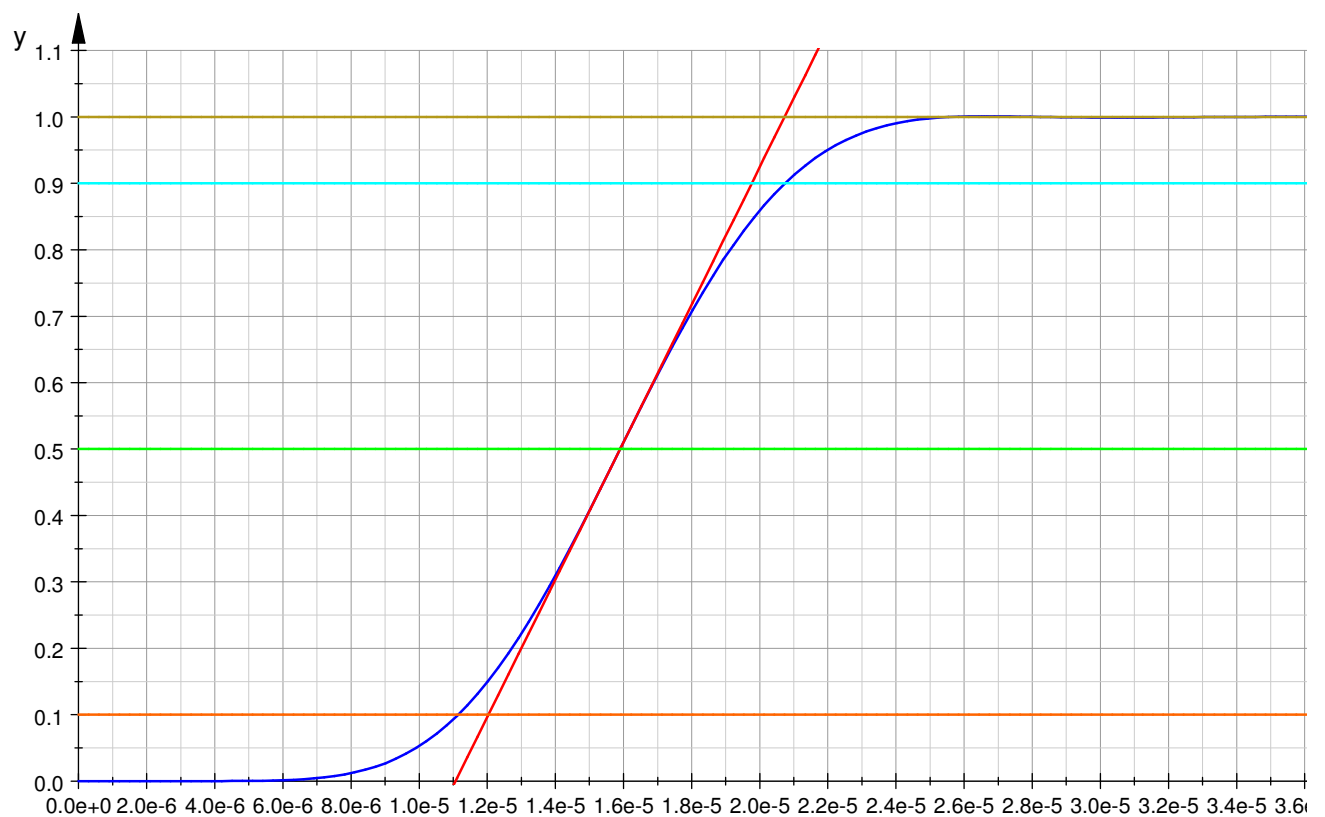
tr, Rise-Time in us

- `tr:=op(numeric::solve(ua(t)=9/10,t=anf..ende, RestrictedSearch),1)-op(numeric::solve(ua(t)=1/10,t=anf..ende, RestrictedSearch),1):tr/1e-6;`

9.5945125803568036197517576874568

- `plotfunc2d(ua(t), yt(t), 1/2, 1, 1/10, 9/10, t=0..maximum, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Vergrößerung Sprungantwort", YRange=0..1.1):`

Vergrößerung Sprungantwort



Erregung des Filters mit  $L\{\sin(\omega_a(t-t_0))\} \rightarrow \omega_a e^{-(t-t_0)p} / (p^2 + \omega_a^2)$

- `wa:=2*PI*1e3:`

konj.-kompl. Polstellen

- `PS:=float(solve((p^2+wa^2/wg^2)*prodp=0,p));`

`{- 434924.90845417783007584236310563 -  
54517.012076102187128499313017748 I`

,

`- 434924.90845417783007584236310563 +  
54517.012076102187128499313017748 I`



```

,
- 195338.96800516112151264050209568 -
517275.76279676493991958461470805 I

,
- 195338.96800516112151264050209568 +
517275.76279676493991958461470805 I

, -0.1 I, 0.1 I,

- 374950.86314360731440304355357487 -
275514.3575031837766417172141897 I

,
- 374950.86314360731440304355357487 +
275514.3575031837766417172141897 I

,
- 307010.22990141869258617593074196 -
391127.37320871579706985100789864 I

,
- 307010.22990141869258617593074196 +
391127.37320871579706985100789864 I

,
- 415650.98997002132257675151128559 -
164089.65188672666659564630514089 I

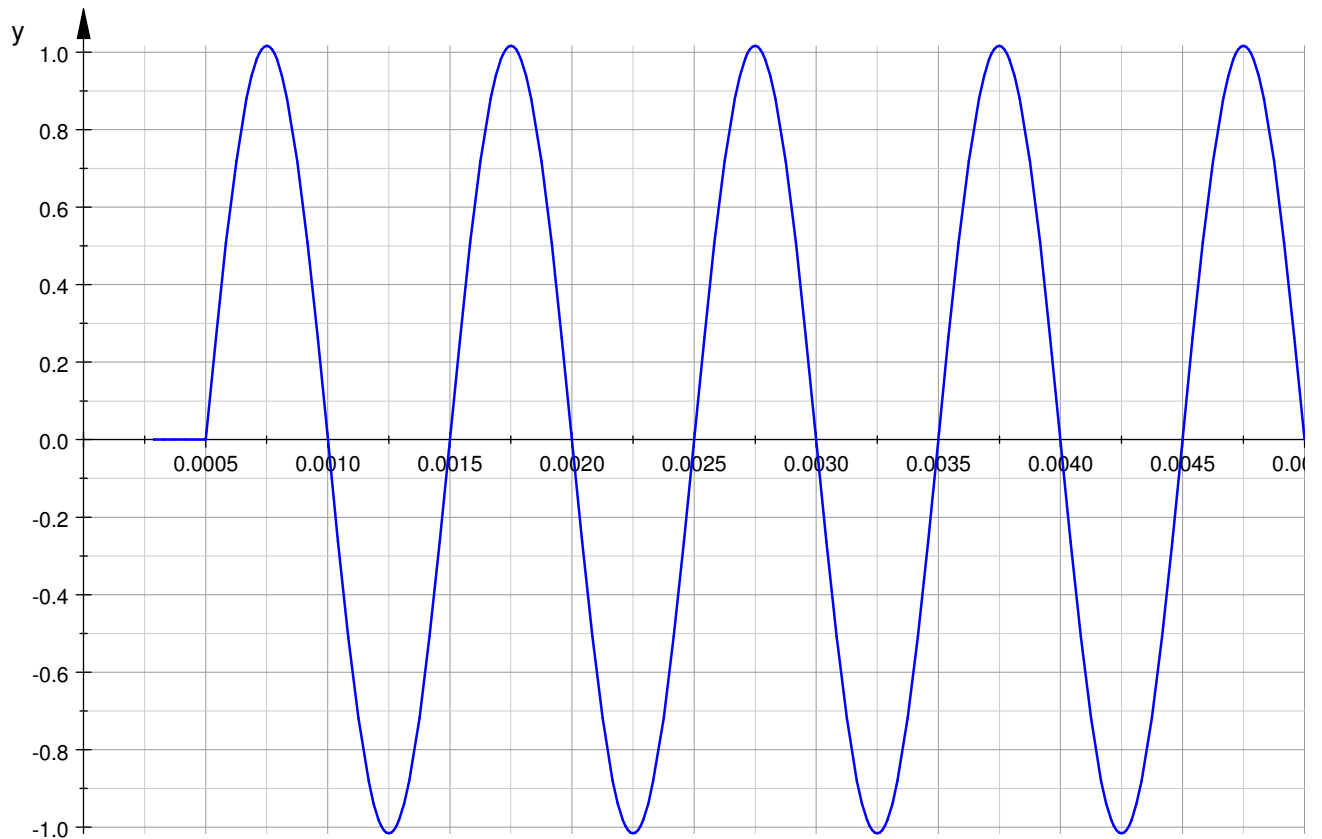
,
- 415650.98997002132257675151128559 +
164089.65188672666659564630514089 I

}

• lap:=_mult(p/wg-op(PS,i) $ i=1..nops(PS)):
• ua:=(t)-->b0/(1+1/ue2)*2*wg^2/1.6e-
29*Re(transform::invlaplace(wa*exp(-0.0005*p)/lap,p,t)):
• plotfunc2d(ua(t), t=0..0.005, LegendVisible=FALSE,
CoordinateType=LinLin,
GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,
Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort des
Filters auf sin(wa*(t-t0))"):

```

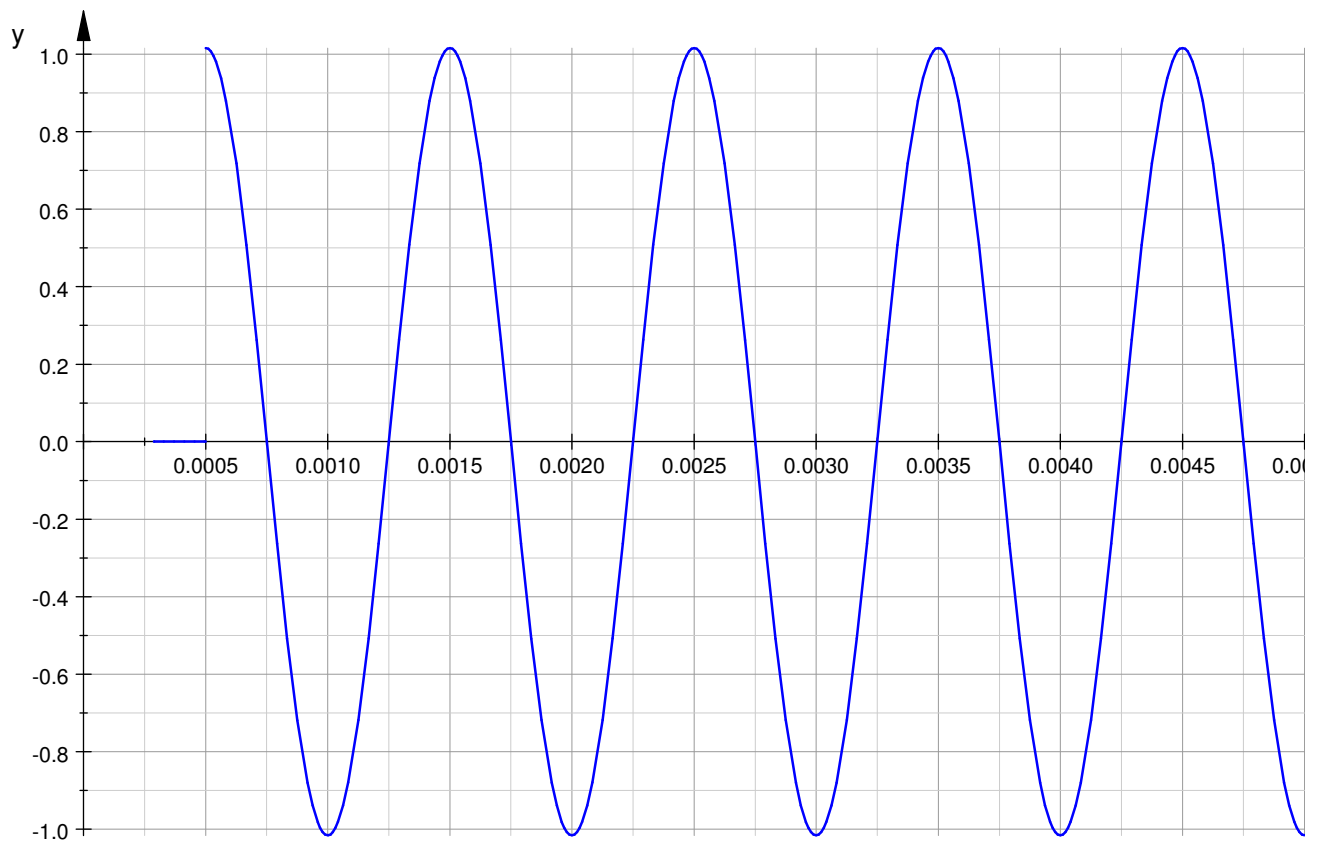
Antwort des Filters auf  $\sin(\omega_a(t-t_0))$



Erregung des Filters mit  $\cos(\omega_a t) \rightarrow \omega_a p / (p^2 + \omega_a^2)$

- `ua := (t) --> b0 / (1 + 1/ue2) * 2 * wg^2 / 1.6e-29 * Re(transform::invlaplace(p * exp(-0.0005 * p) / lap, p, t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..0.005, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort des Filters auf cos(wa*(t-t0))"):`

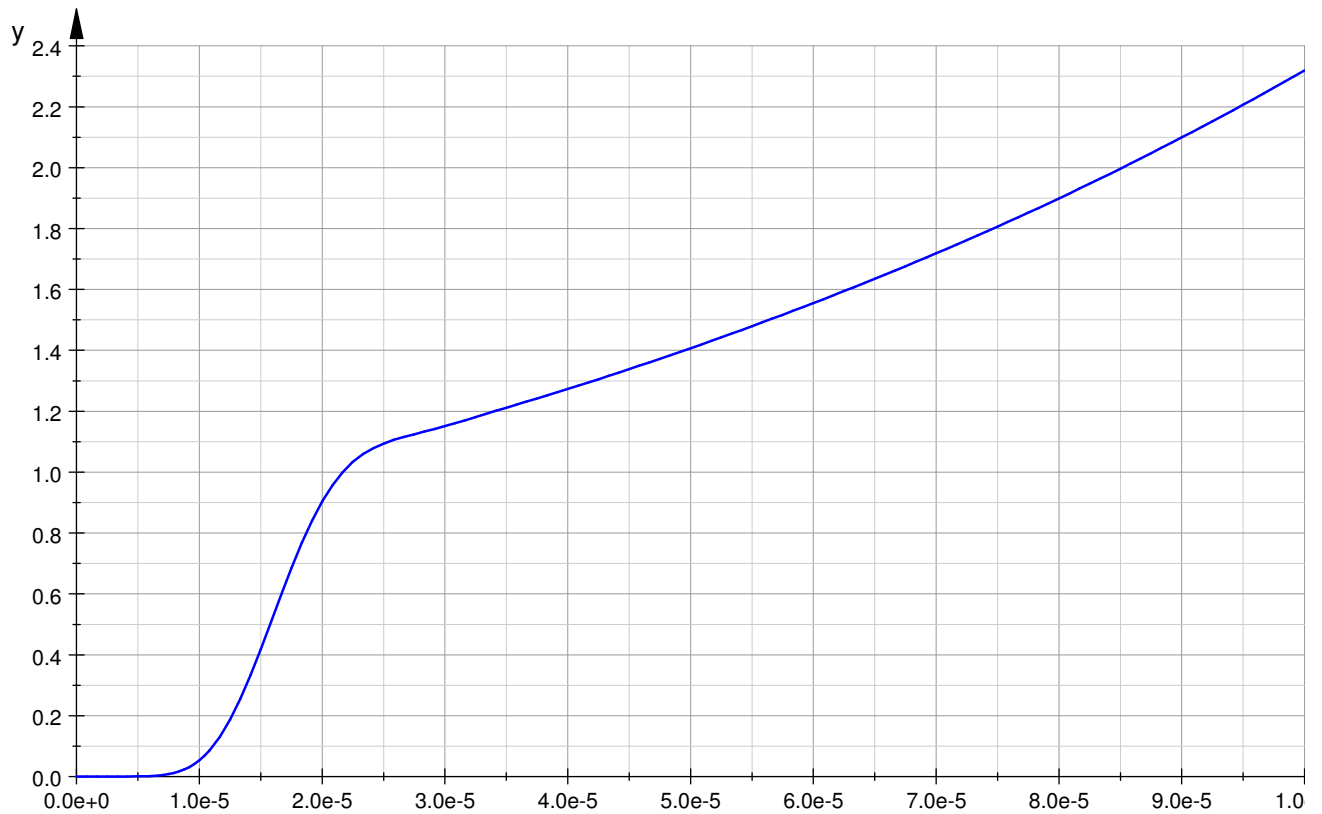
### Antwort des Filters auf $\cos(\omega a(t-t_0))$



Erregung des Filters mit  $L\{e^{-a \cdot t}\} \rightarrow 1/(p+a)$ ,  $a=-10000$

- `a:=-10000:`
- `ua:=(t)-`  
`>Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)*2/(p+a)/prodp,p,t)):`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE,`  
`CoordinateType=LinLin,`  
`GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,`  
`Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort des`  
`Filters auf  $\exp(-a \cdot t)$ ,  $a=-10000$ ", YRange=0..2.4):`

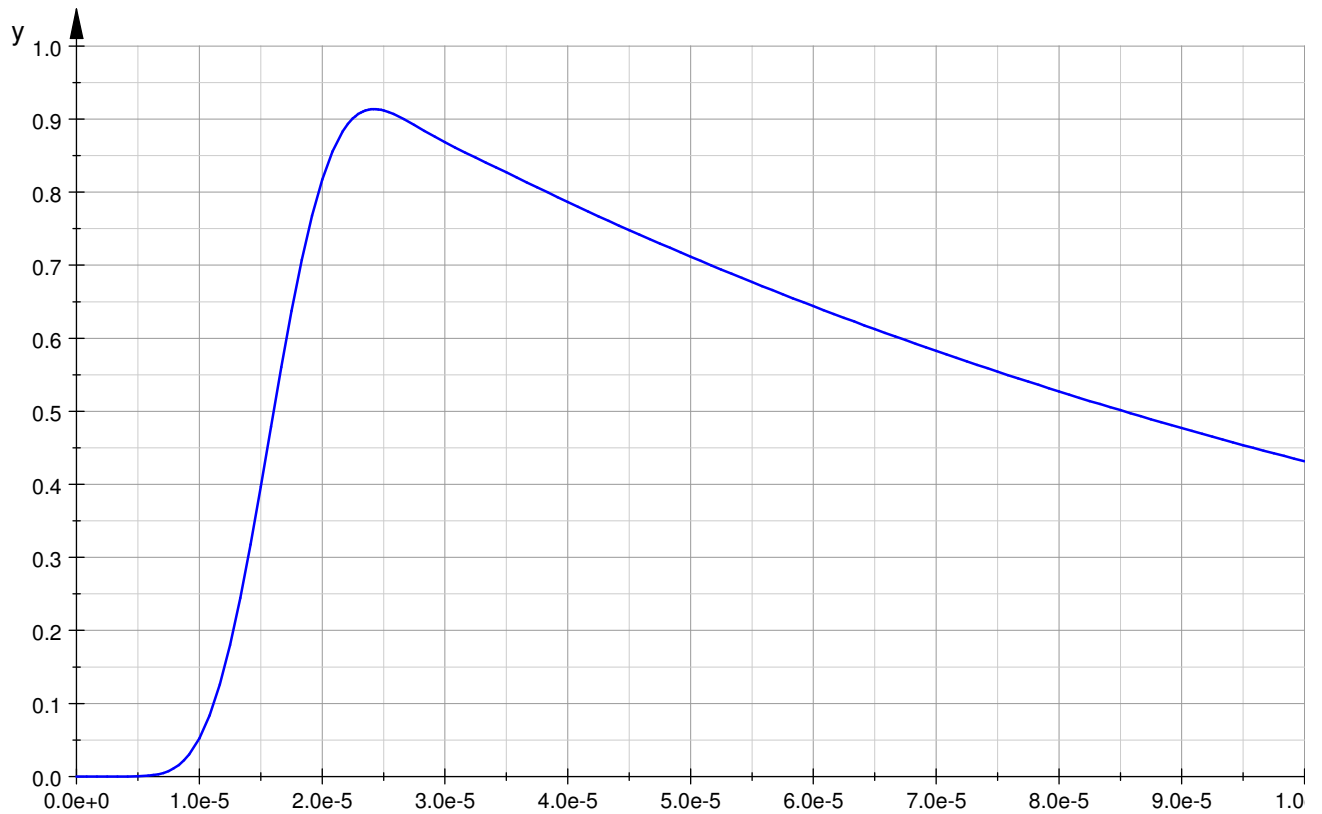
### Antwort des Filters auf $\exp(-a*t)$ , $a=-10000$



Erregung des Filters mit  $L\{e^{(-a*t)}\} \rightarrow 1/(p+a)$ ,  $a=10000$

- $a:=10000$ :
- $ua:=(t)-$   
>Re(transform::invlaplace(b0/(1+1/ue2)\*2/(p+a)/prodp,p,t)):
- plotfunc2d(ua(t), t=0..1/fg, LegendVisible=FALSE,  
CoordinateType=LinLin,  
GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE,  
Height=120\*unit::mm, Width=180\*unit::mm, Header="Antwort des  
Filters auf  $\exp(-a*t)$ ,  $a=10000$ ", YRange=0..1):

### Antwort des Filters auf $\exp(-a*t)$ , $a=10000$



Antwort des Filters  $L\{u_e(t)\} = \frac{1}{p} (1 - 2 \cdot \exp(-6.25e-5 \cdot p) + \exp(-12.5e-5 \cdot p))$

- `ua := (t) -> b0 / (1 + 1/ue2) * 2 * Re (transform::invlaplace (1/p / prodp - 2/p * exp(-6.25e-5*p) / prodp + 1/p * exp(-12.5e-5*p) / prodp, p, t)) :`
- `plotfunc2d(ua(t), t=0..1.7e-4, LegendVisible=FALSE, CoordinateType=LinLin, GridVisible=TRUE, SubgridVisible=TRUE, Height=120*unit::mm, Width=180*unit::mm, Header="Antwort auf eine 8 kHz-Rechteckschwingung", YRange=-1.1..1.1) :`

